УДК: 333.1; 519.86
JEL R13; C71

**В.А. Васильев**
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

**Об эквивалентности ядер и равновесий
в многорегиональной экономической системе**

*Аннотация*

В докладе анализируются условия эквивалентности ядер и вальрасовских равновесий в пространственных моделях регионального взаимодействия, предложенных акад. А.Г.Гранбергом и его учениками [4]. Исследуются два варианта: 1) асимптотическая эквивалентность (в терминах стягиваемости ядер реплик) и 2) совпадение нечетких ядер с множеством вальрасовских равновесных распределений. Помимо самостоятельной ценности, оба варианта представляют значительный интерес для изучения вопросов существования вальрасовских равновесий в указанных пространственных моделях.

*Ключевые слова:* многорегиональная экономическая система, асимптотическая эквивалентность ядер и равновесий, равновесие Вальраса, нечеткое ядро

**V.A.Vasil’ev**
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (Novosibirsk, Russia)

**On the core equivalence in a multiregional economic system**

Abstract
The paper deals with the core equivalence in multiregional economic systems. Two cases are considered: asymptotical equivalence and the fuzzy-core equivalence. The results obtained seem to be rather useful in equilibrium-existence investigations relating to the multiregional economic systems under consideration.

Keywords: multiregional model, core equivalence, Walrasian equilibrium, fuzzy core.

## 1 Модель $\mathcal{M}$

Как и в [2], в докладе рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [4,5], определяемая следующими параметрами:

$$\mathcal{M} = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R}\rangle,$$

где $R = \{1,\dots, r\}$ - множество регионов; $A^s$ - прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$; $G^s$ и $H^s$ -прямоугольные матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$; $b^s$ - вектор-столбец размерности $n_s$, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$; $d^s$ - вектор-столбец размерности $n_s$, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

Напомним [4,5], что ресурсно-технологические возможности $Z_s$ региона $s \in R$ определяются формулой

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{l_s}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

где неотрицательные вектор-стобцы $x^s = (x_i^s)_{i=1}^{l_s}$, $u^s = (u_j^s)_{j=1}^{n}$, $v^s = (v_j^s)_{j=1}^{n}$ указывают объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно, а число $\lambda_s \in \mathbb{R}_+$ - степень достижения целей регионального развития для $s \in R$ (как обычно, символом $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, а неравенство для векторов понимается в обычном покомпонентном смысле: $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i$, $i = 1,\ldots, m$ для любых векторов $x = (x_1,\ldots, x_m)$ и $y = (y_1,\ldots, y_m)$ из $\mathbb{R}^m$). Элементы множества $Z_s$ называются *планами* региона $s$.

Цели регионов задаются функциями $t_s$, сопоставляющими вектору $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ его последнюю компоненту $\lambda_s$: $t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s$, $(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$, $s \in R$. Положим $Z_{\mathcal{M}} := \prod_{s\in R} Z_s$ и через $Z_{\mathcal{M}}(R)$ обозначим совокупность *сбалансированных планов* модели $\mathcal{M}$: $Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}} \mid \sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s \}$.
В дальнейшем часто используются так называемые *строго автаркические планы*, под которыми понимаются элементы множеств

$$\hat{Z}(s) = \hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s \}, \quad s \in R$$

(как обычно, сокращение $x \gg y$ для векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ означает выполнение строгих неравенств $x_i > y_i$, $i = 1,\ldots, m$). Напомним также [2], что при анализе условий ограниченности множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$ рассматриваются сбалансированные планы *однородной составляющей модели* $\mathcal{M}$, определяемой формулой: $\mathcal{M}_0 = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s\in R}\rangle$.

## 2 Вальрасовское равновесие и нечеткое ядро

Следуя [5], напомним одно из основных понятий работы – определение вальрасовского равновесия в модели межрегионального взаимодействия $\mathcal{M}$.

**Определение 1.** *Будем говорить, что план* $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ *является вальрасовским равновесием модели* $\mathcal{M}$*, если существует ненулевой вектор цен* $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$ *такой, что* $\bar{p}\cdot\bar{u}^s \geq \bar{p}\cdot\bar{v}^s$ *для всех* $s\in R$*, и при этом для любых* $s \in R$ *и* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ *из* $Z_s$ *справедлива импликация*: $\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p}\cdot u^s < \bar{p}\cdot v^s$ (*как обычно,* $x \cdot y$ *- скалярное произведение векторов* $x$ *и* $y$).
*Совокупность вальрасовских равновесий модели* $\mathcal{M}$ *будем обозначать через* $W(\mathcal{M})$.

Как уже отмечалось в [2], одна из основных задач, решаемых с применением различных обобщений известной теоремы Скарфа о непустоте ядра заключается в получении условий существования вальрасовского равновесия, не требующих ограниченности множеств $Z_s$. Поиск таких условий предлагается осуществлять путем решения двух теоретико-игровых задач: одна из них заключается в определении требований, гарантирующих совпадение множества $W(\mathcal{M})$ и нечеткого ядра модели $\mathcal{M}$, другая - в нахождении условий непустоты указанного нечеткого ядра (отметим, что достаточно общие условия такого рода установлены в [1]). Настоящий доклад посвящен исследованию первой из указанных задач.

Для полноты изложения напомним определение нечеткого ядра модели $\mathcal{M}$, опирающееся на понятие блокирования с помощью нечеткой коалиции. Как обычно, нечеткими коалициями будем называть элементы множества $\sigma_F$, определяемого формулой $\sigma_F := \{ f = (f_1,\ldots, f_r) \mid f \neq 0,\ f_s \in [0,1],\ s \in R\}$. Величина компоненты $f_s$ нечеткой коалиции $f$ указывает степень участия региона $s \in R$ в координации усилий "большой коалиции" $R$. Через $R(f)$ будем обозначать носитель нечёткой коалиции $f = (f_1,\ldots, f_r)$, определяемый равенством $R(f) := \{ s \in R \mid f_s > 0\}$. Следуя [5], введем определение нечеткого блокирования во множестве $Z_{\mathcal{M}}(R)$.

**Определение 2.** *Будем говорить, что план* $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ *блокируется нечёткой коалицией* $f = (f_1, \ldots, f_r)$, *если существуют региональные планы* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$, $s \in R(f)$, *такие, что* $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$ *для каждого* $s \in R(f)$, *и при этом выполняется балансовое неравенство* $\sum_{s\in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s\in R(f)} f_s v^s$.
*Совокупность сбалансированных планов модели* $\mathcal{M}$, *не блокируемых никакой нечёткой коалицией, будем обозначать через* $C_F(\mathcal{M})$ *и называть нечётким ядром модели* $\mathcal{M}$.

Введем понятия строгой автаркичности и ненасыщенности регионов, использовавшиеся в [2] при обсуждении условий существования вальрасовских распределений модели $\mathcal{M}$.

**Определение 3.** *Регион* $s \in R$ *называется строго автаркическим, если выполняется условие:* $\hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$ (*то есть, если существует план* $z_0^s = (x_0^s, u_0^s, v_0^s, \lambda_s^0) \in Z_s$ *такой, что* $u_0^s \gg v_0^s$).

**Определение 4.** *Регион* $s \in R$ *называется ненасыщенным, если справедливо неравенство:* $\sup_{z^s\in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{\tilde{z}^s\in \tilde{Z}_s} t_s(\tilde{z}^s)$, *где* $\tilde{Z}_s := \mathrm{Pr}_{Z_s} Z_{\mathcal{M}}(R)$.

В работе [2] была анонсирована следующая теорема эквивалентности.

**Теорема 1.** Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то ее нечеткое ядро $C_F(\mathcal{M})$ совпадает с множеством вальрасовских планов $W(\mathcal{M})$.

Основные результаты предлагаемого доклада заключаются в конкретизации условий автаркичности и ненасыщенности регионов модели $\mathcal{M}$. Переходя к одной из детализаций **Теоремы 1**, укажем важное свойство регионов рассматриваемой модели, наличие которого гарантирует их ненасыщенность.

**Определение 6.** *Регион* $s \in R$ *называется неограниченным по функционалу, если его целевая функция* $t_s$ *не ограничена на* $Z_s$.

В заключение сформулируем одну из конкретизаций **Теоремы 1.**

**Теорема 2.** Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические и неограниченные по функционалу, то ее нечеткое ядро $C_F(\mathcal{M})$ совпадает с множеством вальрасовских планов $W(\mathcal{M})$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН им. С.Л.Соболева (проект № 0314-2019-0018) и поддержана РФФИ (грант № 19-010-00910).

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Васильев В.А. Об одном обобщении теоремы Скарфа о непустоте ядра // Препринт № 283, ИМ СО РАН. -2012. Новосибирск. 41С.

[2]. Васильев В.А. О равновесии в многорегиональных экономических системах с неограниченными технологическими множествами // Труды Гранберговской конференции, Сборник докладов Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения акад. А.Г.Гранберга, Новосибирск: ИЭОПП СО РАН. -2017. -С. 324-331.

[3]. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем // Сибирский журнал индустриальной математики. -2009. Том XII, № 4(40). -С. 23-34.

[4]. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. -2007. Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во.

[5]. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. -1983. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние.