ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МЕР . НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рапопорт Э.О.

ИМ СО РАН, НГУ
rapoport@math.nsc.ru

1.Стационарные k-точки

В настоящее время много усилий прилагается к исследованию проблем выбора точек сосредоточения некоторых масс, например, места размещения сети магазинов, системы складов сети избирательных участков и т.п. с минимальными затратами потребителей на дорогу. В итоге задачи сводятся к определению границ областей и центров этих областей (по некоторой метрике), так, чтобы некоторый функционал достигал экстремума.

Впервые подобная задача была рассмотрена и решена автором в 1979 году для произвольной счетно-счетно аддитивной меры, заданной на числовой прямой. Метрику Канторовича-Рубинштейна (заданную на некотором компакте) удалось расширить на всю числовую прямую, потребовав ограниченности первых моментов.

Пусть задана некоторая вероятностная мера μ с функцией распределения F(t) и непрерывной плотностью f(t), определенная на всей числовой прямой с конечным абсолютным первым моментом.

Задача состоит в построении некоторой дискретной меры с носителями в конечном числе точек, наилучшим образом (по метрике Канторовича-Рубинштейна) приближающую исходную меру. Было показано, что все оптимальные точки должны являться стационарными.

Стационарной k-точкой или просто k-точкой будем называть множество точек (узлов) $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ (носителей дискретной меры), для которых выполняются соотношения

$$F(a_1) = 1/2\ F((a_1+a_2)/2)$$
$$F(a_j) =1/2\ (F((a_{(j-1)} + a_j)/2)+ F((a_j + a_{(j+1)})/2))$$
$$F(a_k) = 1/2+1/2\ F((a_{(k-1)} + a_k)/2).$$

Отметим смысл этих соотношений: оптимальный барьер между двумя узлами носителя дискретной меры должен находиться на середине отрезка, ограниченного этими узлами, а в каждом узле носителя должна делиться пополам часть меры μ, сосредоточенная между барьерами, окружающими эту точку.

В работе [1], опубликованной в 1979 году были предложены два сходящихся алгоритма последовательного построения узлов и барьеров, приводящие к самой левой и самой правой стационарным k-точкам.

Там же доказаны две теоремы.

Теорема 1. Существует k-точка, наилучшим образом приближающая заданную меру.

Теорема 2. Для того, чтобы существовала единственная оптимальная стационарная k-точка, необходимо и достаточно, чтобы
«левая» и «правая» k-точки совпадали.

В [6] приведены разнообразные примеры, когда наилучшие приближения могут быть единственными, ситуации, когда таких приближений несколько, причем возможны и случаи, когда таких приближений бесконечно много.

2. Некоторые приложения.

В работе [2] (1979) изучалась задача о размещении на прямой магазинов, торгующих одним и тем же товаром (Линейный город). При этом рассматривалось только равномерное распределение покупателей.
Если магазины принадлежат одной фирме, то предложенный в разделе 1 подход дает полное решение задачи о размещении магазинов, минимизирующих суммарные транспортные затраты покупателей при **любой** плотности распределения покупателей.

Аналогично решается и задача для плоского города с плотностью f(x,y).
Задача для плоского города только в случае равномерного распределения рассматривалась в [4] в 2009 году. Используя евклидову метрику авторы получили зоны тяготения каждого узла в виде правильных шестиугольников.
Заметим, что эвклидова метрика плохо подходит для измерения городских расстояний. Значительно естественнее использовать так называемую манхеттенскую метрику, т.е. метрику, порожденную нормой r(x,y) = |x| + |y|. При такой метрике показано (см. [6]), что зоны тяготения узлов для любой плотности имеют вид прямоугольников, причем метод построения этих прямоугольников сводится к рассмотренному в [1] одномерному случаю.

Распределение сети магазинов для случая круглого города описано в [3]. Изучался лишь случай равномерного распределения меры по окружности. Изложенный в разделе 1 подход применим и в этом случае для любого распределения меры на окружности.

Изложенная в разделе 1 задача оказывается весьма полезна и при исследовании миграционно-устойчивых распределений [5], 2009. Подобная работа была проделана при исследовании миграционной устойчивости некоторого разбиения отрезка на страны, имеющие вид выпуклых интервалов - последовательное разбиение. Изучался как случай равномерного распределения жителей на отрезке, так и произвольного распределения.

Следует отметить, что предложенное в разделе 1 разбиение узлами (столицы) и барьерами (границы) при параметре g = 0 является миграционно-устойчивым . В [6] приведен случай, когда единственным миграционно–устойчивым распределением является распределение, предложенное в [1].

Предложенная концепция миграционной устойчивости одинаково ("политически корректно") учитывает интересы всех жителей, игнорируя различную плотность их размещения на отрезке. Если рассмотреть интегральную характеристику учета интересов жителей (интеграла от целевых функций каждого жителя с учетом плотности их распределения), то при предложенной целевой функции каждого жителя получаем задачу, рассмотренную в разделе 1. В этом случае наилучшее решение, минимизирующее в среднем суммарные транспортные затраты всех жителей при любом g - описанные в разделе 1 оптимальные стационарные k-точки.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты №16-06-00101 и № 16- 01-001108) и РГНФ (грант № 16-02-00070).

Литература.

1.Рапопорт Э.О. О наилучшем приближении вероятностных мер на прямой дискретными // Оптимизация 23(40)Новосибирск,1979, с.17-24.

2. Salop S. Monopolistic Competition with Outside Goods //Bell Journ. Econ.,1979. Vol.43.P.141-156.

3. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности Т.2, пер. с англ., СПб, 2000. С.~500.

4. Bogomolnaia, A., Le Breton, M., Savvateev, A. and Weber, S.
Stability under unanimous consent, free mobility and core.// International Journal of Game Theory, 2007,35, 185-204.

5. Dreze, J., Le Breton M., Savvateev A., and Weber S.
Almost subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting. //Journal of Economic Theory, 2009, Vol.143, Issue 1, pp.275-291.

6. Рапопорт Э.О. О дискретном приближении непрерывных мер и некоторых приложениях // Сибирский журнал индустриальной математики. Том XV, № 3(51). 2012, с. 99-110.