О РАВНОВЕСИИ В МНОГОРЕГИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

В.А. Васильев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
vasilev@math.nsc.ru

В докладе излагаются результаты применения теоретико-игровых методов, разработанных в [1], к анализу условий существования вальрасовских равновесий в моделях межрегионального взаимодействия. В отличие от работы [2], главное внимание уделяется подходу, не предполагающему ограниченности региональных технологических множеств. Ключевую роль в доказательстве новой теоремы существования играет обобщение на случай нечеткого блокирования установленной в [3] теоремы об условиях непустоты ядра изучаемых многорегиональных систем.

1 Модель $\mathcal{M}$

В докладе рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [4,5], имеющая следующий вид:

$$\mathcal{M} = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R} \rangle,$$

где $R = \{1,\dots, r\}$ - множество регионов; A^s - прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$; G^s и H^s -прямоугольные матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$; b^s - вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$; d^s - вектор-столбец размерности n_s, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

Ресурсно-технологические возможности Z_s региона $s \in R$ определяются формулой

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{l_s}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

где неотрицательные вектор-стобцы $x^s = (x^s_i)^{l_s}_{i=1}$, $u^s = (u^s_j)^n_{j=1}$, $v^s = (v^s_j)^n_{j=1}$ указывают объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно, а число $\lambda_s \in \mathbb{R}_+$ - степень достижения целей регионального развития для $s \in R$ (как обычно, символом $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, а неравенство для векторов понимается в обычном покомпонентном смысле: $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i$, $i = 1,\dots, m$ для любых $x = (x_1,\dots, x_m)$ и $y = (y_1,\dots, y_m)$ из $\mathbb{R}^m$). Элементы множества Z_s будем называть *планами* региона s.

Для оценки качества планов $z^s \in Z_s$ в дальнейшем используются функции t_s, сопоставляющие каждому вектору $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ его последнюю компоненту λ_s:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R.$$

Положим $Z_{\mathcal{M}} := \prod_{s\in R} Z_s$ и через $Z_{\mathcal{M}}(R)$ обозначим совокупность *сбалансированных планов* модели $\mathcal{M}$:

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}} \mid \textstyle\sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s \}.$$

Важную роль в дальнейшем играют так называемые *строго автаркические планы*, под которыми понимаются элементы множеств

$$\hat{Z}(s) = \hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s \}, \quad s \in R$$

(как обычно, сокращение $x \gg y$ для векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ означает выполнение строгих неравенств $x_i > y_i$, $i = 1,\ldots, m$).

Кроме того, при анализе условий ограниченности множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$ потребуется рассмотрение сбалансированных планов *однородной составляющей модели* $\mathcal{M}$, определяемой формулой: $\mathcal{M}_0 = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s\in R}\rangle$.

2 Вальрасовское равновесие и нечеткое ядро

Следуя [5], введем одно из основных понятий работы – определение вальрасовского равновесия в модели межрегионального взаимодействия $\mathcal{M}$.

Определение 1. *Будем говорить, что план* $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s\in R} \in Z_M(R)$ *является вальрасовским равновесием модели* $\mathcal{M}$, *если существует ненулевой вектор цен* $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что* $\bar{p}\cdot\bar{u}^s \geq \bar{p}\cdot\bar{v}^s$ *для всех* $s\in R$, *и при этом для любых* $s \in R$ *и* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ *справедлива импликация*: $\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p}\cdot u^s < \bar{p}\cdot\bar{v}^s$ (*как обычно,* $x \cdot y$ *- скалярное произведение векторов* x *и* y).

Совокупность вальрасовских равновесий модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $W(\mathcal{M})$. Оказывается [2], что достаточно общие условия, гарантирующие существование вальрасовских равновесий модели $\mathcal{M}$, представляют собой естественное усиление указанных в [3] требований ($M1$) и ($M2^o$), обеспечивающих непустоту ядра модели $\mathcal{M}$. Дадим необходимые определения.

Определение 2. *Регион* $s \in R$ *называется строго автаркическим, если* $\hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$ (*или, более детально, если существует план* $z^s_0 = (x^s_0, u^s_0, v^s_0, \lambda^0_s) \in Z_s$ *такой, что* $u^s_0 \gg v^s_0$).

Определение 3. *Будем говорить, что ресурсно-технологические возможности региона* $s \in R$ *ограниченные, если множество* Z_s *ограничено.*

Теорема 1 [2]. Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические, а их ресурсно-технологические возможности ограниченные, то в $\mathcal{M}$ существует вадьрасовское равновесие.

Как уже отмечалось, основной целью доклада является демонстрация условий существования равновесия, не включающих требования ограниченности множеств Z_s. Отыскание таких условий осуществляется на пути решения двух теоретико-игровых задач: одна из них заключается в определении требований, гарантирующих совпадение множества $W(\mathcal{M})$ и нечеткого ядра модели $\mathcal{M}$, другая - в нахождении условий непустоты указанного нечеткого ядра.

Для полноты изложения напомним определение нечеткого ядра модели $\mathcal{M}$, опирающееся на понятие блокирования с помощью нечеткой коалиции. Как обычно, нечеткими коалициями называются элементы множества σ_F, определяемого формулой $\sigma_F := \{ f = (f_1, \ldots, f_r) \mid f \neq 0,\ f_s \in [0,1],\ s \in R\}$. Величина компоненты f_s нечеткой коалиции f указывает степень участия региона $s \in R$ в координации усилий "большой коалиции" R.Через $R(f)$ будем обозначать носитель нечёткой коалиции $f = (f_1, \ldots, f_r)$, определяемый равенством $R(f) := \{ s \in R \mid f_s > 0\}$. Следуя [5], введем определение нечеткого блокирования во множестве $Z_{\text{м}}(R)$.

Определение 4. *Будем говорить, что план* $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_M(R)$ *блокируется нечёткой коалицией* $f = (f_1, \dots, f_r)$, *если существуют региональные планы* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$, $s \in R(f)$, *такие, что* $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$ *для каждого* $s \in R$, *и при этом имеет место баланс:* $\sum_{s\in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s\in R(f)} f_s v^s$.

Совокупность сбалансированных планов модели м, не блокируемых никакой нечёткой коалицией, будем обозначать через C_F(м) и называть { *нечётким ядром модели* м.

Введем понятие ненасыщенности региона, используемое в дальнейшем при описании условий совпадения нечетких ядер и вальрасовских планов модели м.

Определение 5. *Регион* $s \in R$ *называется ненасыщенным, если для него выполняется неравенство:* $\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{\tilde{z}^s \in \tilde{Z}_s} t_s(\tilde{z}^s)$, *где* $\tilde{Z}_s := \mathrm{Pr}_{Z_s}\} \; Z_{\text{м}}(R)$.

Один из основных результатов доклада заключается в следующей теореме эквивалентности.

Теорема 2. Если регионы модели м строго автаркические и ненасыщенные, то ее нечеткое ядро C_F(м) совпадает с множеством вальрасовских планов W(м).

Переходя к представлению условий существования равновесия, применимых к моделям, имеющим неограниченные технологические множества, напомним важное условие, "отвечающее" (наряду с автаркичностью) за наличие неблокируемых планов таких моделей (см., например, [3]).

Определение 6. *Будем говорить, что* модель м не имеет "рога изобилия", если множество сбалансированных планов однородной составляющей этой модели исчерпывается нулевым планом: $Z_{\text{M}_0}(\text{R}) = \{0\}$.

Используя введенную терминологию, сформулируем главный результат доклада.

Теорема 3. Если модель м не имеет "рога изобилия", а ее регионы - строго автаркические и ненасыщенные, то в м существует вальрасовское равновесие.

Работа поддержана РФФИ (грант №16-06-00101) и РГНФ (грант № 16-02-00070).

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Васильев В.А. Об одном обобщении теоремы Скарфа о непустоте ядра. Препринт № 283, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012, 41с.

[2]. Васильев В.А. О существовании вальрасовского равновесия в модели межрегиональных экономических отношений. Дискретный анализ и исследование операций. Том 19, № 4, 2012, с.15-34.

[3]. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем. Сибирский журнал индустриальной математики. Том XII, № 4(40). 2009, с. 23-34.

[4]. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во. 2007.

[5].. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1983.